العنوان:	خوارزميات حل المعادلات الخطية واللاخطية
المؤلف الرئيسي:	إبراهيم، علي عبدالله علي
مؤلفين آخرين:	حمد النيل، معاوية إبراهيم(مشرف)
التاريخ الميلادي:	2018
موقع:	أم درمان
الصفحات:	1 - 59
رقم MD:	1000320
نوع المحتوى:	رسائل جامعية
اللغة:	Arabic
الدرجة العلمية:	رسالة ماجستير
الجامعة:	جامعة أم درمان الاسلامية
الكلية:	كلية التربية
الدولة:	السودان
قواعد المعلومات:	Dissertations
مواضيع:	خوارزميات حل المعادلات، حل المعادلات الخطية، حل المعادلات اللاخطية، الحل بالتعويض، خوارزمية طريقة التنصيف، خوارزمية الموضوع الكاذب، طريقة نيوتن رافسن
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/1000320

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

جامعة أمدرمان الإسلامية

كلية الدراسات العليا

كلية التربية قسم الرياضيات والفيزياء

بحث تكميلي مقدم لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

بعنوان:

خوارزميات حل المعادلات الخطية واللاخطية

إعداد الطالب:

علي عبد الله علي إبراهيم

إشراف الدكتور:

معاوية إبراهيم حمد النيل

مايو 2018م

استهلال

قال تعالى:

﴿لَقَدْ كَانَ لَكُمْ فِي رَسُولِ اللَّهِ أُسْوَةٌ حَسَنَةٌ لِّمَن كَانَ يَرْجُو اللَّهَ وَالْيَوْمَ الْآخِرَ وَذَكَرَ اللَّهَ كَثِيرًا﴾ صدق الله العظيم

الإهداء

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة، إلى نبي الرحمة ونور العالمين.

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار – إلى من علمني العطاء بدون انتظار..

إلى من أحمل اسمه بكل افتخار، أرجو من الله أن يمد في عمرك ..

(والدي العزيز)

إلى ملاكي في الحياة، إلى معنى الحب والحنان .. إلى بسمة الحياة وسر الوجود..

إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي..

(أمي الحبيبة)

إلى رفيقتي التي ساندتني وسارت معي الدرب خطوة بخطوة ..

إلى شمعة متقدة تنير ظلمة حياتي ..

(زوجتي العزيزة)

إلى صغيراتي متعهم الله بالصحة والعافية ..

(أمنية – آفاق)

إلى الإخوة والأخوات – إلى من تحلوا بالإخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء ..

إلى من سعدت برفقتهم في دروب الحياة، إلى من كانوا معي على طريق النجاح..

(أصدقائي وزملائي وزميلاتي)

في حقل التعليم.

الشكر والتقدير

الحمد لله رب العالمين الذي بنعمته تتم الصالحات، ومن لا يشكر الناس لا يشكر الله. فهذه فرصة طيبة لتقديم الشكر أولاً لله عزَّ وجلّ، ثم من بعد أتقدم بالشكر إلى كلية الدراسات العليا جامعة أمدرمان الإسلامية، والشكر موصول لكلية التربية جامعة أمدرمان الإسلامية، والشكر أيضاً إلى جامعة أمدرمان الإسلامية فرع كردفان، والشكر موصول بلا حدود وخالص التقدير إلى الدكتور/ معاوية إبراهيم حمد النيل الذي أفادني كثيراً ولم يبخل علي بفيض علمه وكان خير معين لي في هذا البحث.

فهرس المحتويات

مستخلص البحث

تناول هذا البحث الطرق العددية والحاسوبية لحل المعادلات الخطية واللاخطية، حيث جاءت مشكلة البحث على أنه يصعب حل المعادلات الخطية بالطريقة العادية، وهدف البحث إلى التعرُّف على المعادلات الخطية وطريقة حلها. والتعرُّف على المعادلات اللاخطية وطريقة حلها. والتعرُّف على طريقة الحل بالحاسوبية ومقارنة الحل العادي. واستخدم البحث المنهج الوصفي التحليلي. وخلُّص البحث إلى أن حل المعادلات الخطية واللاخطية بطريقة العددية يكلف وقت إما عن طريق الحاسوبية يتقلل الوقت ولكن الطالب يكون بعيداً عن فكرة الحل ولذلك نوصي الطالب أن يعمل على استخدام الطريقتين.

Abstract

This research deals with numerical and computational methods of solving linear And nonlinear equations. The problem of research is that it is difficult to solve linear equations in the normal way. The research aims to identify linear equations and solve them. Identify the nonlinear equations and solve them. Identify the method of solving the computer and compare the normal solution. The research used descriptive analytical method. The solution concluded that the solution of linear and nonlinear equations in a numerical way costs time, either by the computer method, which reduces time, but the student is away from the idea of the solution, and therefore we recommend that the student use the two methods.

الباب الأول

المقدمة

المقدمة:

1-1 المعادلات الخطية واللاخطية:

المعادلات الخطية هي معادلة تتكون من الدرجة الأولى وتكون في متغير واحد أو متغيرين.

- المعادلات اللاخطية هي معادلة تكون من الدرجة أكبر من الدرجة الأولى وتكون في متغير واحد أو متغيرين .
- المعادلات الخطية لها أكثر من طريقة لحلها من بينها الحل بالتعويض والحل البياني ــ الأسلوب المباشر والأسلوب الغير مباشر.
- أما المعادلات اللاخطية له عدة طرق للحل ، طريقة التصنيف والموضع الكاذب وطريقة نيوتن رافسن كل طريقة لها خوارزمية حل.

تتلخص هذه الطرق بصورعامة في إيجاد حل المعادلات الخطية واللاخطية .

وتستخدم الطريقة الحاسوبية في إيجاد حل المعادلات الخطية واللاخطية .

1-2 مشكلة البحث:

في بعض الأحيان نجد أن هنالك بعض المعادلات الخطية واللاخطية يصعب حلها بالطريقة العادية لذلك نلجا إلى طرق آخرى لحل هذه المعادلات ومنها حل المعادلات الخطية واللاخطية عن طريق الحاسوبية.

1-3 أهمية البحث:

- الطرق الحاسوبية تساعد على حل المعادلات الخطية واللاخطية .
- يمكن من حل المعادلات بطريقة سريعة وساهل في بعض الأحيان.

1-4 أهداف البحث:

- حل المعادلات الخطية واللاخطية .
- التعرف على المعادلات الخطية وطريقة حلها.
- التعرف على المعادلات اللاخطية وطريقة حلها.
- التعرف على طريقة الحل بالحاسوبية ومقارنة الحل العادي
- نقارن الحل العادي مع الحل عن طريقة الحاسوبية .

1-5 منهجية البحث:

يستخدم الباحثون في هذا البحث المنهج الوصفي والتحليلي .

1-6 حدود البحث:

حدود مكانية ولاية شمال كردفان- جامعة أمدرمان الإسلامية فرع الأبيض

حدود زمانية : 2018-2019م

محتوى البحث:

يحتوي البحث على خمسة أبواب وهي :

الباب الأول يحتوي على :

مقدمة عامة:

مشكلة البحث

أهمية البحث

أهداف البحث

محتوي البحث:

الباب الثاني ويحتوي على:

المعادلات الخطية وطريقة حلها

مقدمة

الباب الثاني

حل منظومة المعادلات الخطية

Solution of Linear Systems

2-1 مقدمة: introduction

تنشأ منظومة المعادلات الخطية في كثير من المجالات العلمية تطبيقة كانت أو نظرية ونخص بالذكر حل المعادلات التفاضلية بالطرق العددية حيث تتولد أنظمة كبيرة الحجم لا يمكن التعامل معها يدوياً بل لابد من جهاز الحاسب .

ونظراً للعدد الهائل من العمليات الحسابية اللازمة لإجراء آية عملية جبرية فإن الناتج غالباً ما يكون محملاً بالخطأ.

وفي هذا الفصل نستعرض بعض الطرق المباشرة وبعض الطرق التكرارية.

2-2 المعادلات الخطية الآنية:

Smutaneouslinear Equations

منظومة من معادلتين خطيتين آنيتين systems Tow Linear Equations

المعادلة الخطية في متغيرين y,x تأخذ الصيغة sx+bx=c حيث c,b,a ثابت و b,a ليس كلاهما أصفار إذا اعتبرنا أثنين من هذه المعادلات:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (2-1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2-2)$$

فقد نقول أننا حصلنا على معادلتين انيتين خطيتين في مجهولين أو منظومة من معادلتين خطيتين أنيتين في مجهولين .

يطلق على زوات القيم y,x , (x,y) التي تحقق هاتين المعادلتين الحل الأني للمعادلات المعطاة لذلك الحل الأني للمعادلتين.

x-y=3, x+y=7 هو (5،2) موضح هنا ثلاثة طرق لحل مثل هذه النظم للمعادلات الخطية:

الحل بالجمع أو الطرح.

إذ لزم ضرب المعادلات المعطاة بإعداد التي تجعل معادلات احد المجاهل في المعادلات الناتجة متساوية عددياً.

إذا كانت أشارات المعادلات متماثلة فاطرح المعادلات . مثلاً اعتبر المعادلتين :

1- $2x-y=4$

2- $x+2y=-3$

احذف y بضرب (1) في 2 ثم جمعها على (2) لنحصل على

$$1- \quad 4x - 2y \ = \ 8$$

$$\begin{array}{l} 2- \quad 2x + 2y \ = \ -3 \\ \hline \qquad 5x \qquad = 5 \end{array}$$

$$\therefore x = 1$$

عوض x=1 في (1) وأحصل على 2-y=4

$$\therefore y = -4$$

قد يكون الحل الآني لــ (1) و (2) هو (1,-2)

2-3 الحل بالتعويض:

أوجد قيمة أحد المجاهيل بدلالة المجهول الأخر في واحد من المعادلتين المعطيتين وعوض هذه القيم في المعادلة الأخرى.

2-4 الحل البياني:ـــ

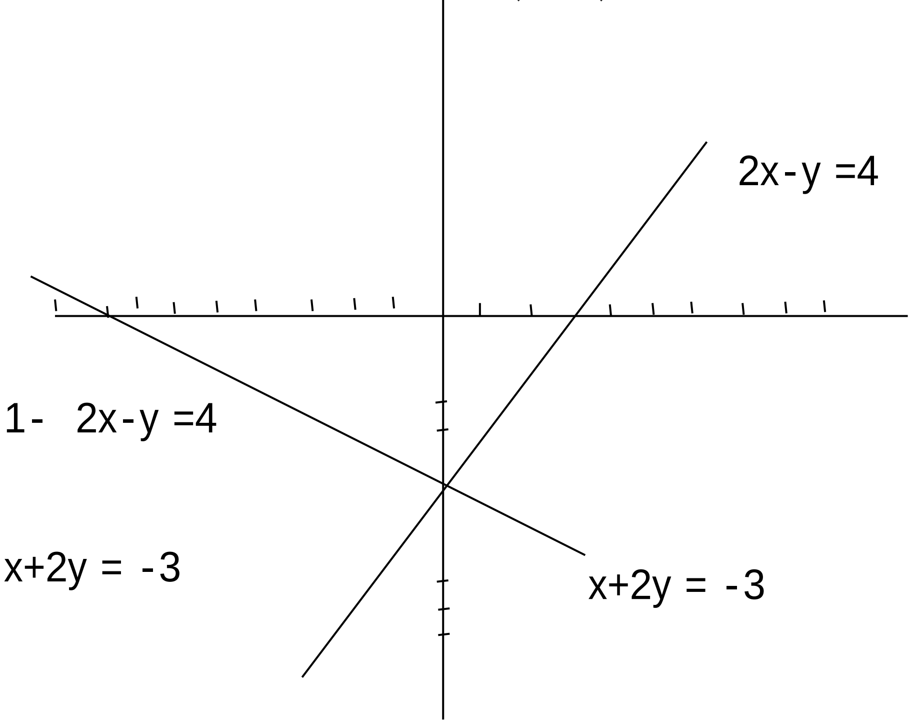
أرسم المعادلتين بيانياً لتحصل على خطين متقيمين الحل الأني يعطي بالإحداثيات (x,y) لنقطة تقاطع هذه الخطوط.

الشكل يوضح أن الحل الأني:

1- 2x-y =4

2- 2+2y = -3

هو $x=1$ ، $x=-2$ ويكتب أيضاً $(1,-2)$



الشكل $(1-2)$

إذا كانت الخطوط متوازية فتكون المعادلات غير متفقة ولا يكون لدينا حل أنياً.

(4)

2-5 المنظومة الخطية :

ترتب المعادلات الخطية بحيث تكون تسلسل المتغيرات هو نفسه في كل المعادلات وتكتب الواحدة تحت الأخرى وبالشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2-3)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث تحتوي m من المعادلات و n من المتغيرات $(x_1 , \dots x_n)$ وتكتب هذه المنظومة بشكل مصفوفات ومتجهات كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ويسهول أن نرمز لها بالرمز $(2-4)$ Ax=b

حيث أن A هي مصفوفة المعادلات و x هو متجهة المتغيرات و b هو متجه اليمنى وهو ثابت.

فإذا كان عدد المعادلات أكبر من عدد المتغيرات فلا يوجد حل للمنظومة إلا إذا كانت المعادلات الأضافية مكافئة لمعادلات أخرى عندها يمكن الاستغناء عنها وإيجاد الحل:

مثلاً:

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$5x_1 - 3x_2 = 2$$

وإذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات فيكون للمنظومة عدد كبير من الحلول مثل:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \qquad (2-5)$$

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$5x_1 - 3x_2 = 2$$

أما اذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات حيث تكون مصفوفة المعادلات مربة فإن للمنظومةححل وحيد إذا كانت A غير شاذة هنالك أسلوبين لحل المنظومات الخطية:ــ

أولاً: الأسلوب المباشر

ثانياً: الأسلوب التكراري

- الاسلوب المباشر يشمل :

1-طريقة كاوس للحذف

2-طريقة التحليل المثلثي

-الأسلوب التكراري أو (غير المباشر) فيشمل:

أ- طريقة جاكوبي

ب-طريقة سيدال

ج-طريقة الاسترخاء (SoR)

سنبدأ بالطرق المباشرة:

6-2 طريقة كاوس للحذف :

الفكرة الرئيسية لطريقة الحذف لجاوس لحل النظام هي استخدام بعض العمليات المسموح بها اكتابته الشكل المثلثي المساوي Ax=b

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \dots \dots & a_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & \dots\dots\dots 0 \ a_{mn} \dots a_m & \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية عليا ومتجهة العمود .

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

والذي يمكن حله بسهولة باستخدام التعويض الخلفي

$$x = \frac{\overset{n}{b_n}}{\underset{a_n}{n}} \qquad (2.6)$$

$$x_i = \frac{1}{\underset{a_{ij}}{n}} \left[\underset{b_2}{n} - \int_{j=i+1}^{n} \underset{a_{ij}}{n} x_j \right] \qquad (2-7)$$

من الحل i=n,n-2,…2,1 وذلك إذا كان $a_{ii} \neq 0$ لكل n …i=1,2 قبل الشروع بمناقشة طريقة الحذف الكاوس بالشكل العام سوف نستعرضها من خلال المثال التالي:

نستانف لأن مناقشة طريقة الحذق لكاوس بشكلها العام لحل النظام الخطي لعمل ذلك نكتب هذا النظام بالشكل المصفوفي Ax=b ونستخدم ماتسمى بالمصفوفة الموسوعة للنظام الخطي والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$[A:b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots a_{1m} : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ a_{n1} & a_n \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

والتي عبارة عن مصفوفة من النوع (n+1) n x حيث أن العمود (n+1) هو عبارة عن متجهة العمود b .

كما سبق أن ذكرنا فإن هدف طريقة الحذف لجاوس هو حذف العناصر التي تقع تحت قطر المصفوفة وبالتالي فإن المرحلة الأولى للطريقة هي حذف المتغير x_1 من المعادلات E_j من $j = 2,3, \dots n$ وذلك بتنفيذ العمليات التالية:

$$E_j - m_{j1}E_j) \rightarrow E_j \dots (2.8)$$

حيث $m_{ji} = \frac{a_{j1}}{a_{11}}$ من أجل *j=2,3,.... N* وذلك بغرض أن $a_{11} \neq 0$ لنحصل على

$$[A^{(2)}:b^{(2)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \dots & a_{1n}^{(1)}: b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} \quad \dots & a_{2n}^{(2)} \; b_2^{(2)} \\ . & & . \quad . \\ . & & . \quad . \\ . & & . \quad . \\ 0 & a_{n2}^{(2)} \dots & a_{nn}^{(2)} \; b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

للدلالة على أن هذه العناصر b_1 a_{1j} , $1 \leq j$,الرمز الموجود أعلى العناصر

$\leq b_1, 1 \leq j$ $= \underset{1}{b^{(1)}}$ a_{ij} $= \underset{\text{ij}}{a^{(1)}}$لم تتأثر بالعمليات الحسابية (2.6) أي أن

تشير هنا إلى أنه إذا لم يكن هنالك تغير للصفوف فإن عنصر الارتكاز (هنا n

) ومعادلة الارتكاز المعادلة الأولى لا تتاثر بالعمليات الحسابية ، من ناحية a_{11}

الأخرى فإن الرمز (2) الموجود على باقي العناصر للأشارة على هذه العناصر قد

للعناصر التي قد $a_{ij}^{(k+1)}$ تأثرت بالعمليات الحسابية في الواقع سنرمز بالرمظ

لكل k تأثرت بالعمليات الحسابية المرافقة للمرحلة k=1,2,..n-1

الأن إذا كان عنصر الارتكاز $a_{22}^{(2)} \neq 0$ فأنه يمكن حذف المتغير x_i من المعادلات E_i من أجل $\mathrm{j} = 2{,}4 \dots \mathrm{n}$ وذلك بتنفيذ العمليات.

$$(E_j - m_{j2}E_2) \rightarrow E_j$$

حيث أن $m_{j2} = \frac{a_{j2}}{a_{22}}$ من أجل $\mathrm{j} = 2{,}4, \dots \mathrm{n}$

إذا كان عنصر الارتكاز $a_{kk}^{(k)}$ لا يساوي الصفر فإنه يمكن انجاز العمليات الحسابية

$$\left(E_j - m_{jk}E_k\right) \rightarrow k_j \qquad (2.7)$$

حيث أن $m_{jk} = \frac{a_{jk}}{a_{kk}}$ من أجل $\mathrm{j} = \mathrm{k} + 1, \mathrm{k} + 2, \dots \mathrm{n}$ لحذف x_k من المعادلة E_j من أجل $\mathrm{j} = \mathrm{k} + 1, \mathrm{k} + 2, \dots \mathrm{n}$ أما إذا كان $a_{kk}^{(k)} = 0$ فإنه لا يمكن إجراء العمليات الحسابية ولذلك يمكن التمكن من حساب m_{jk} والأسلوب المتبع في هذه الحالة هو البحث عن عنصر في العمود k يقع تحت القطر ولايساوي الصفر إذا كان $a_{pk}^{(k)} \neq 0$ حيث $k + 1 \leq p \leq 0$ فإننا نغير مواقع الصفين $E_k \leftrightarrow E_p$ ومن ثم نتابع الحذف كما سبق. (1)

2-7 خوارزمية الحذف لكاوس والتعويض الخلفي:

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة الحذف لكاوس والتعويض الخلفي لحل النظام الخطي Ax=b إذا اعطينا عدد المجاهيل n عناصر المصفوفة A والمتجهة b فان الخوارزمية تصب الحل x للنظام الخطي .

الخطو 1 : من أجل k=1,2,...,n-1 أعمل الخطوات من 2 إلى .

الخطوة 2: أبحث عن أصغر عدد صحيح موجب بحيث أن $k \leq 1 \leq$ n , $a_{1k} \neq 0$ إذا لم يوجد عدد صحيح يحقق ذلك ؟؟؟ لا يوجد حل وحيد .

الخطوة 3 : إذا كان $i \neq k$ فبدل مواقع الصفين ، I,k للمكان الأخر .

الخطوة 4: من أجل $i = k+1, k+2, \ldots n$ أعمل الخطوات من 5 إلى 9 :

الخطوة 5 : $a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

الخطوة 6 : $a_{ik} = 0$

الخطوة 7 : $bi = b_i - m_{ik} b_k$

الخطوة 8 : $i = k+1, k+2, \ldots n$ أحسب

$$a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$$

الخطوة 9 : إذا كان $a_{nn} = 0$ طبعاً لا يوجد حل وحيد قف

الخطوة 10 : أحسب $x_n = \frac{b_k}{a_{nn}}$

الخطوة 11 : من أجل i=n-1,n-2,...2,1 أحسب

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right] \qquad (2.9)$$

الخطوة 12 : أطبع الحل x

قف

2.8 طريقة التحليل المثلثي Triangular Decomposition

في طريقة كاوس للحذف لحل المنظومة الخطية:

حولنا المصفوفة A من مربعة إلى مثلثية ثم اجرينا عملية التعويض التراجعي لايجاد الحل ولو فرضنا بعد فترة معينة ثم تغير متجهة الجهة اليمنى فقط فإننا نحتاج إلى إجراء نفس العمليات التي إجريت سابقاً على المصفوفة A والمتجهة b ولاننا لم نحتفظ بهذه الإجراءات فإننا سنضطر إلى أعادتها حتى على المصفوفة A وقد يتكرر ذلك أكثر من مرة ولأجل حذف هذا الإجراء نعرض طريقة التحليل المثلثي.

في هذه الطريقة تحلل المصفوفة A إلى حاصل مصفوفتين مثلثين سفلي وعلوي فتصبح المعادلة بالصورة.